|  |  |
| --- | --- |
| **4. Триангуляции многоугольника на плоскости**  Пусть 𝐹 — замкнутый многоугольник на плоскости и 𝑃 = {𝑝1, 𝑝2, . . ., 𝑝𝑛} — такое его конечное подмножество, которое содержит все вершины 𝐹. Необходимо перечислить все триангуляции многоугольника 𝐹, вершинами которых являются точки множества 𝑃. Алгоритм решения этой задачи описан в [3]. Дадим альтернативное описание этого алгоритма. Не теряя общности, будем считать, что отрезок [𝑝1, 𝑝2] является стороной многоугольника 𝐹.  Рассмотрим дерево 𝒟, вершинами которого являются такие упорядоченные наборы Δ1, Δ2, . . ., Δ𝑘 треугольников с вершинами из множества 𝑃, объединение которых является связным множеством и которые можно достроить до триангуляции на 𝑃 путем добавления (справа) других треугольников (с вершинами из 𝑃), или эти наборы уже сами являются триангуляциями на 𝑃. Кроме того, дерево 𝒟 содержит пустой набор ∅,  который является корнем дерева. Пусть 𝑢 = Δ1, Δ2, . . ., Δ𝑘 и 𝑣 = Δ′1, Δ′2, . . ., Δ′𝑙 две вершины дерева 𝒟. Тогда из вершины 𝑢 в вершину 𝑣 идет дуга тогда и только тогда, когда 𝑙 = 𝑘 + 1 и Δ𝑖 = Δ′𝑖 при 𝑖 = 1, 2, . . ., 𝑘. Иными словами, (𝑢, 𝑣) — дуга в том и только том случае, когда набор 𝑣 получается из набора 𝑢 путем добавления в конец набора 𝑢 некоторого треугольника. Триангуляциям многоугольника 𝐹 (с дополнительными точками из 𝑃) соответствуют листья дерева 𝒟.  Пусть 𝑢 = Δ1, Δ2, . . ., Δ𝑘 — вершина дерева 𝒟, не являющаяся триангуляцией. Тогда из 𝑢 выходит хотя бы одна дуга. Введем на множестве дуг, выходящих из 𝑢, отношение порядка «≺». Пусть имеется две дуги (𝑢, 𝑣) и (𝑢, 𝑣′). Тогда 𝑣 и 𝑣′ получаются из набора 𝑢 путем добавления в конец набора Δ𝑘+1 и Δ′𝑘+1  некоторых треугольников Δ𝑘+1 и Δ′𝑘+1  соответственно. Эти треугольники имеют общие отрезки с некоторыми треугольниками набора 𝑢. Пусть 𝑎, 𝑏 и 𝑎′, 𝑏′ — номера вершин этих отрезков. Не теряя общности, считаем, что 𝑎 < 𝑏 и 𝑎′ < 𝑏′. Пусть также 𝑐 и 𝑐′ — номера третьих вершин треугольников Δ𝑘+1 и Δ′𝑘+1. Тогда считаем, что (𝑢, 𝑣) ≺ (𝑢, 𝑣′) в том и только том случае, когда 𝑎 < 𝑎′  или когда 𝑎 = 𝑎′ и 𝑏 < 𝑏′ или когда 𝑎 = 𝑎′, 𝑏 = 𝑏′ и 𝑐 < 𝑐′. Таким образом, «≺» является модификацией лексикографического порядка.  Напомним, что нумерация вершин множества 𝑃 такова, что отрезок [𝑝1, 𝑝2] является стороной многоугольника 𝐹. | **4. Polygon triangulation on a plane**  Let 𝐹 be a closed polygon on the plane, and 𝑃 = {𝑝1, 𝑝2, . . ., 𝑝𝑛}, which is its finite subset that contains all vertices of 𝐹. It is necessary to specify all triangulations of polygon 𝐹 with its vertices being represented by points from the set 𝑃. The algorithm for solving this problem is described in [3]. We provide an alternative description of this algorithm. Without losing generality, we consider the segment [𝑝1, 𝑝2] as a side of polygon 𝐹.  Consider the tree 𝒟 with its vertices represented by the ordered set of Δ1, Δ2, . . ., Δ𝑘 of triangles with vertices from the set 𝑃. The union of these sets is a connected set. The sets can be completed into the triangulation on 𝑃 by adding (to the right) other triangles (with vertices from 𝑃). Alternatively, these sets are already the triangulations on 𝑃. Additionally, the tree 𝒟 contains a null set ∅, which is the root of the tree. Let 𝑢 = Δ1, Δ2, . . ., Δ𝑘 and 𝑣 = Δ′1, Δ′2, . . ., and Δ′𝑙 is the two vertices of the tree 𝒟. Then, a curve goes from vertex 𝑢 to vertex 𝑣 only if 𝑙 = 𝑘 + 1 and if Δ𝑖 = Δ′𝑖 at 𝑖 = 1, 2, . . ., 𝑘. Thus, (𝑢, 𝑣) is an arc only if the set 𝑣 is obtained from the set 𝑢 by adding a triangle at the end of the set 𝑢. The leaves of the tree of 𝒟 correspond to the triangulations of polygon 𝐹 (with additional points from 𝑃).  Let 𝑢 = Δ1, Δ2, . . ., Δ𝑘, which is the vertex of the tree 𝒟 that is not a triangulation. Then, at least one arc originates from 𝑢. We introduce an order relation “≺” on the set of arcs that originate from 𝑢. Let there be two arcs (𝑢, 𝑣) and (𝑢, 𝑣′). Then, 𝑣 and 𝑣′ are obtained from the set 𝑢 by adding triangles Δ𝑘+1 and Δ′𝑘+1 to the end of set Δ𝑘+1 and Δ′𝑘+1, respectively. These triangles have common segments with triangles of the set 𝑢. Let 𝑎, 𝑏 and 𝑎′, 𝑏′ be the numbers of the vertices of these segments. Without losing generality, we consider that 𝑎 < 𝑏 and 𝑎′ < 𝑏′. Additionally, let 𝑐 and 𝑐′ be the numbers of the third vertices of triangles Δ𝑘+1 and Δ′𝑘+1. Then, we consider that (𝑢, 𝑣) ≺ (𝑢, 𝑣′) only if 𝑎 < 𝑎′ or when 𝑎 = 𝑎′ and 𝑏 < 𝑏′ or when 𝑎 = 𝑎′, 𝑏 = 𝑏′ and 𝑐 < 𝑐′. Thus, “≺” is a modification of a lexicographical order.  Furthermore, the numbering of the vertices from the set 𝑃 is such that the segment [𝑝1, 𝑝2] is a side of polygon 𝐹. |